۹۱/۱۰/۱۲

دو برنامه تابع مطلق ۱۱

## رویه‌های حل معادلهٔ گرما:

این معادلات در کل ۴ نوع دارند. دو حالت به سری فوریه می‌شوند و ۲ حالت به انتگرال فوریه. همچنین ۲ حالت محدود و دو حالت نامحدود دارند. البته می‌توان برای حالت محدود، ۴ زیر حالت بنا بر تغییرات شرایط مرزی تعریف کرد ولی اکثر رویه‌های حل این معادلات که بالا شد در ۴ حالت به روش کلی جدا نمی‌شد!

**حالت اول: اگر میله محدود به طول $L$ باشد (نوع اول)**

$$\begin{cases} u_{xx}=\frac{1}{c^2}u_t, & 0<x<L,\ t\geq 0 \\ u(0,t)=u(L,t)=0 \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

شرایط مرزی روی خود تابع $u$ (و نه مشتق آن) داده شده است.

پس از حل معادلهٔ گرما به وسیله روش جداسازی به جواب زیر می‌رسیم. رسیدن به جواب زیر و حل معادلهٔ گرما از طریق روش جداسازی بسیار ساده است:

$$u(x,t)=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)e^{-(\lambda c)^2 t}$$

باید این نکته ذکر شود که دلیل تبدیل به مساوی عبارات ناشی از حل روش جداسازی

قرار می‌دهیم $(-\lambda^2)$، حتماً باید منفی باشد زیرا به ازای $+\lambda^2$ (یا هر عدد مثبت دیگر) جواب حاصل در $t \to \infty$ بی‌کران می‌شود. لذا معادله برای $+\lambda^2$ جوابی در پی نخواهد داشت. حال با اعمال شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$u(0,t)=0 \longrightarrow A=0$$

$$u(L,t)=0 \longrightarrow \sin \lambda L = 0 \longrightarrow \lambda L = n\pi \to \boxed{\lambda = \frac{n\pi}{L}}$$

از آنجایی که اعمال شرط اولیه $f(x)$ نیازمند به جزء سری فوریه نوشتن تابع است لذا خواهیم داشت:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \, e^{-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 t}}$$

ضریب $b_n$ همان ضریب سری فوریه سینوسی تابع $f(x)$ می‌باشد.

با اعمال شرط اولیه خواهیم داشت:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\longrightarrow b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

و کار تمام است.

نکته ظریف و بسیار مهم: فرض کنید شرط مرزی اول آن $u(0,t)=0$ بماند ولی شرط مرزی دوم به $u_x(L,t)=0$ تغییر یابد. این تغییر باعث هر

۹۱/۱۰/۱۲

- به نام خداوند منان -

س ۰،۰ تفاوت گسترش در پاسخ ایجاد خواهد شد! ببینید:

$$u(x,t) = (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x)\, e^{-(\lambda c)^2 t}$$

$$u(0,t) = 0 \longrightarrow A = 0 \longrightarrow u(x,t) = (B\sin\lambda x)\, e^{-(\lambda c)^2 t}$$

$$u_x(L,t) = 0 \longrightarrow \underbrace{B\lambda\cos\lambda L}_{=0}\, e^{-(\lambda c)^2 t} = 0$$

$$\longrightarrow \lambda L = n\pi + \frac{\pi}{2} \longrightarrow \lambda = \pi\left(\frac{2n+1}{2L}\right)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n+1}{2L}\right)\pi x\; e^{-\left(\left(\frac{2n+1}{2L}\right)\pi c\right)^2 t}$$

و $b_n$ همان ضرایب سری فوریه سینوسی تابع $f(x)$ است [مثل قبل]

اما نکته بسیار مهم اینجاست که عایق شدن میله در انتهای آن که ملهم از شرط مرزی $u_x(L,t)=0$ می‌باشد باعث تغییر کیفی و فاحش در همان پایه‌های تعامد تابع $f(x)$ که همان $\sin\lambda x$ گردید. در اینجا باز این نکته به خاطر سپرده شد.

حالت دوم: اگر میله محدود و به طول $L$ باشد (نوع دوم):

$$\begin{cases} u_{xx} = \dfrac{1}{c^2} u_t & 0 < x < L \,,\; t \geq 0 \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

شرایط مرزی روی مشتق تابع $u$ (و نه خود آن) داده شده است.

طبق سوال قبل پس از حل معادله به روش جدا سازی متغیرها عبارت زیر را خواهیم داشت:

$$u(x,t) = \left(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x\right) e^{-(\lambda c)^2 t}$$

$$u_x(0,t)=0 \longrightarrow B=0 \longrightarrow u(x,t)=(A\cos\lambda x)\, e^{-(\lambda c)^2 t}$$

$$u_x(L,t)=0 \longrightarrow -\lambda L \sin\lambda L \cdot e^{-(\lambda c)^2 t} = 0$$

$$\longrightarrow \lambda L = n\pi \longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{n\pi}{L}}$$

$$\longrightarrow \boxed{u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x \cdot e^{-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 t}}$$

ضریب $a_n$ همان ضریب سری فوریه کسینوسی تابع $f(x)$ میباشد.

با اعمال شرط اولیه خواهیم داشت:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx =$$ ثابت سری فوریه

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

و (۲٫۶) است.

۹۱/۱۰/۱۲ — به نام خداوند بزرگ —

نکته‌ی بسیار ظریف و مهم: مثلاً نکته‌ی قبل در حالت اول، نکته‌ای در این حالت مخفی است. اگر شرط مرزی اول یعنی $u_x(0,t)$ را همانند قبل شرط مرزی دوم به $u(L,t)=0$ تغییر یابد، خواهید دید که مثل انتظار تغییر کیفی در آن توابع پایه تعامدی خواهیم داشت:

$$u(x,t)=(A\cos\lambda x+B\sin\lambda x)\,e^{-(\lambda c)^2 t}$$

$$u_x(0,t)=0 \longrightarrow B=0 \longrightarrow u(x,t)=(A\cos\lambda x)\,e^{-(\lambda c)^2 t}$$

$$u(L,t)=0 \longrightarrow A\cos\lambda L\; e^{-(\lambda c)^2 t}=0$$

$$\longrightarrow \lambda L=n\pi+\frac{\pi}{2} \longrightarrow \boxed{\lambda=\frac{\pi(2n+1)}{2L}}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\right)\pi x\,.\, e^{-\left(\frac{(2n+1)}{2L}\pi\cdot c\right)^2 t}$$

پس برداشته شدن عایق در انتهای سیم منجر به تغییر کیفی در توابع پایه تعامد $f(x)$ گردید.

۹۱/۱۰/۱۲ — به نام خداوند بزرگ —

نکته بسیار مهم اول: اگر شرط مرزی اول یا شرط مرزی در $x=0$ روی خود تابع $u$ باشد آنگاه قطعاً پاسخ تعامد مسئله $\sin \lambda x$ خواهد بود. اما اگر شرط مرزی در $x=0$ روی مشتق تابع $u$ باشد آنگاه قطعاً پاسخ تعامد مسئله $\cos \lambda x$ خواهد بود. بنابراین شرط مرزی اول بسته به اینکه روی $u$ یا $u_x$ باشد تعیین کننده پاسخ تعامد مسئله خواهد شد.

نکته بسیار مهم دوم: اگر هر دو شرط مرزی روی $u$ و یا هر دو روی $u_x$ باشند، آنگاه آرگومان پاسخ تعامد در هر دو حالت بدون توجه به $\sin$ یا $\cos$ بودن پاسخ تعامد، برابر $\frac{n\pi}{L}$ خواهد بود.
اما اگر یکی از شرایط مرزی روی $u$ و دیگری روی $u_x$ باشد (بدون ترتیب) آنگاه آرگومان پاسخ تعامد بدون توجه به نوع $\sin$ یا $\cos$ بودن آن برابر
آرگومان
عبارت $\left(\frac{2n+1}{2L}\right)\pi$ خواهد بود.

نکته مهم: در این معادله گرما می‌توانند شرط اولیه که به جای $u(x,0)$ به فرم $u_t(x,0)$ نیز بدهند. قبلاً سوال حل مشابه نداشته است اما دقت کنید که برای ارضای شرط اولیه در این حالت باید از معادله $u(x,t)$ بدست آمده، مشتق نسبت به $t$ گرفته شود.

حالت سوم: اگر میله نامحدود باشد: (نوع اول)

$$\begin{cases} u_{xx} = \dfrac{1}{c^2} u_t , \quad x>0 , \; t>0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

$u(0,t)=0 \longrightarrow$ تنها شرط مرزی داده شده روی خود u است.

پس از حل معادله خواهیم داشت:

$$u(x,t) = \left(A\cos\lambda x + B\sin\lambda x\right) e^{-(\lambda c)^2 t}$$

$$u(0,t)=0 \longrightarrow A=0 \Rightarrow u(x,t) = (B\sin\lambda x)\, e^{-(\lambda c)^2 t}$$

چون شرط مرزی دیگری در اختیار نداریم طبیعتاً هیچ قیدی روی $\lambda$ پیدا نمی‌شود. بنابراین بجای سری فوریه از انتگرال فوریه استفاده خواهیم کرد

$$\boxed{u(x,t) = \int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x\; e^{-(\omega c)^2 t}\, d\omega}$$

$$\xrightarrow[\text{اولیه}]{\text{اعمال شرط}} \quad f(x) = \int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x\, d\omega$$

$B(\omega)$ همان ضریب انتگرال فوریه سینوسی است که:

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega x\, dx$$

حالت چهارم: اگر میله نامحدود باشد: (نوع دوم)

$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_t , & x > 0 , \ t > 0 \\ u_x(0,t) = 0 & \longrightarrow \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

تنها شرط مرزی داده شده روی مشتق u است.

پس از حل خواهیم داشت:

$$u(x,t) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) \cdot (e^{-\lambda^2 c^2 t})$$

$$u_x(0,t) = 0 \longrightarrow B = 0 \longrightarrow u(x,t) = (A \cos \lambda x) e^{-(\lambda c)^2 t}$$

چون شرط مرزی کمکی در اختیار نداریم طبیعتاً هیچ قیدی روی $\lambda$ پیدا نمی‌شود. بنابراین به جای سری فوریه، از انتگرال فوریه کمک می‌گیریم:

$$\boxed{u(x,t) = \int_0^\infty A(\omega) \cos \omega x \cdot e^{-(\omega c)^2 t} \, d\omega}$$

که $A(\omega)$ همان ضریب انتگرال فوریه کسینوسی است:

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, dx$$

پاسخ حالت ماندگار:

کافیست در معادله گرما عبارت $u_t$ که مقدار صفر قرار دهید و معادله دیفرانسیل معمولی حاصل که حل کنید. متناسب با شرایط مرزی داده شده جواب بدست می‌آید.

خلاصه معادله گرما:

با دقت در شرایط مرزی از آنها ابتدا حل تقریبی $\lambda$ آشکار شده است!!!

① شرط مرزی در $x=0$ تعیین کننده‌ی پایه تقارن‌ها است.

② شرط مرزی در $x=L$ تعیین کننده‌ی کیفیت مقدار $\lambda$ می‌باشد.

شرط اول مرزی روی $u$ $\longrightarrow$ پایه تقارن: $\sin \lambda x$

$u(0,t)=0$

شرط اول مرزی روی $u_x$ $\longrightarrow$ پایه تقارن: $\cos \lambda x$

$u_x(0,t)=0$

هر دو شرط مرزی روی $u$ یا روی $u_x$

$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases}$ OR $\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(L,t)=0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ پایه تقارن: $\sin \frac{n\pi}{L} x$ , $\cos \frac{n\pi}{L} x$

یکی از شرط‌ها روی $u$ و دیگر روی $u_x$

$\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u_x(L,t)=0 \end{cases}$ OR $\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ پایه تقارن: $\sin \left(\frac{2n+1}{2L}\right)\pi x$ , $\cos \left(\frac{2n+1}{2L}\right)\pi x$

۹۱/۱۰/۳ — به نام الله —

روش‌های حل معادلات موج:

در حالت کلی، حل معادله موج کمی مشکل‌تر از معادله‌ی گرما می‌باشد. در این نوع از معادلات باید به کمک شرایط مرزی و شرایط اولیه توجه زیادی داشته باشیم زیرا تغییر در هر یک از آنها جواب کاملاً متفاوت از آنچه قبلاً بود خواهد شد. حالات زیادی را می‌توان در یک معادله موج بررسی کرد. در حالت محدود، ما تنها دو حالت کلی آنها را بررسی می‌کنیم.

حالت اول: دو سر طناب به طول $L$ باشد و دو سر آن نیز بسته باشد:

$$\begin{cases} u_{xx} = \dfrac{1}{c^2} u_{tt}, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \\ u(x,0) = f(x), & u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

توجه: بسته بودن طناب در $x=0$ و $x=L$ به معنای آن است که شرایط مرزی روی مقدار تابع $u$ اعمال شده‌اند.

پس از حل معادله به روش جداسازی به جواب زیر خواهیم رسید:

$$u(x,t) = (A\cos\lambda ct + B\sin\lambda ct)(C\sin\lambda x + D\cos\lambda x)$$

$u(0,t)=0 \longrightarrow D=0$

$u(L,t)=0 \longrightarrow \sin\lambda L=0 \longrightarrow \lambda L = n\pi \longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{n\pi}{L}}$

$$\longrightarrow u(x,t) = \left(A\cos\frac{n\pi c}{L}t + B\sin\frac{n\pi c}{L}t\right)\left(C\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

در اینجا بسته به اینکه $f(x)$ یا $g(x)$ صفر باشند، جوابها متفاوت خواهند بود!

الف: $g(x)=0$

در $u_t(x,0)=0 \longrightarrow B=0$

چون بهر $\lambda$، قید پیدا شده از سری فوریه کمک می‌گیریم:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\cos\frac{n\pi c}{L}t\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x}$$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$b_n$ ها ضریب سری فوریه سینوسی تابع $f(x)$ است:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

ب: $f(x)=0$

$u(x,0)=0 \longrightarrow A=0$

مشابه الف از سری فوریه کمک می‌گیریم:

۹۱/۱۰/۱۲ — ((ربنا رب العالمین))

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin \frac{n\pi c}{L} t\right) \sin \frac{n\pi}{L} x}$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n\pi c}{L} b_n \times 1\right)}_{b'_n} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

بدیهی است در این حالت عبارت درون نقطه چین، همان ضرایب سری فوریه سینوسی تابع $g(x)$ است. دقت کنید در این حالت فقط $b_n$ ضریب سری فوریه نیست:

$$b'_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$\longrightarrow b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

حالت دوم: اگر طناب به طول $L$ باشد و دو سر آن باز باشد:

$$\begin{cases} u_{xx} = \frac{1}{c^2} u_{tt}, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x), & u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

توجه: باز بودن طناب در $x=0$ و $x=L$ به معنای آن است که شرایط مرزی روی مشتق تابع $u$ اعمال شده اند.

پس از حل معادله به روش ضربی به جواب زیر خواهیم رسید:

$$u(x,t)=(A\cos\lambda ct+B\sin\lambda ct)(C\sin\lambda x+D\cos\lambda x)$$

$$u_x(0,t)=0 \longrightarrow C=0$$

$$u_x(L,t)=0 \longrightarrow -\lambda D\sin\lambda L=0 \longrightarrow \lambda L=n\pi \Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{n\pi}{L}}$$

$$\Rightarrow u(x,t)=\left(A\cos\frac{n\pi c}{L}t+B\sin\frac{n\pi c}{L}t\right)\left(D\cos\frac{n\pi}{L}x\right)$$

در این جا بسته به اینکه $f$ یا $g$ صفر باشند، جواب متفاوت است:

الف: $g(x)=0$:

$$u_t(x,0)=0 \longrightarrow B=0$$

چون روی $\lambda$ قید پیدا شده از سری فوریه کمک می‌گیریم:

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos\frac{n\pi c}{L}t\right)\cdot\cos\frac{n\pi}{L}x}$$

۹/۱۱/۰/۱۲ درسنامه ارتعاشات ۲۱-

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{2}x$$

an ضرایب سری فوریه کسینوسی است لذا:

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

ب: $f(x)=0$

$$u(x,0)=0 \longrightarrow A=0$$

$$\rightarrow \boxed{u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \sin\frac{n\pi c}{L}t\right)\cos\frac{n\pi}{L}x}$$

$$u_t(x,0)=g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\frac{n\pi c}{L}a_n\times 1}_{a'_n}\cdot\cos\frac{n\pi}{L}x$$

$$a'_n=\frac{2}{L}\int_0^{L} g(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^{L} g(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

نکته مهم ۱: در حالت اول دیدیم که با صفر شدن شرایط اولیه $f$ و $g$،

پایه تعامد همچنان $\sin \lambda_n x$ که باقی ماند و تغییر نکرد. اثبات می‌شود که

پایه‌ی تعامد تنها تابع شرط مرزی $x=0$ است. این شرط مرزی

در $x=0$ به صورت $u(0,t)=0$ باشد پایه تعامد $\sin \lambda_n x$ است ولی

اگر این شرط مرزی اول در $x=0$ به صورت $u_x(0,t)=0$ باشد آنگاه

پایه تعامد $\cos \lambda_n x$ خواهد بود. بنابراین پایه تعامد فقط

تابع کیفیت شرط مرزی $x=0$ است و والسلام!

نکته مهم ۲: مشابه حالت‌های دیگر گفته‌شده، اینجا نیز در حسب کیفیت قید

معادله مشکلی داریم. اگر هر دو شرط مرزی روی $u$ یا روی $u_x$

باشند قید $\lambda$ به فرم $\frac{n\pi}{L}$ می‌باشد و اگر شرط مرزی هر کدام روی

یکی از $u$ و $u_x$ باشند آنگاه $\lambda$ به فرم $\left(\frac{2n+1}{2L}\right)\pi$ می‌باشد.

بنابراین شرط مرزی دوم یعنی شرط مرزی در $x=L$ در کیفیت

قید $\lambda$ نقش بسیار مهمی دارد.

- ریاضیات کاربردی پیشرفته ۱ - ۹۱/۱۰/۱۲

نکته مهم ۳: در حالات الف و حالت اصلی معادله موج، نکته جالبی وجود دارد. در حالت الف فرض برا این بود که $g(x)=0$ است. با این فرض در جواب معادله موج نکته مهمی دیده می‌شود و آن این است که اگر $u_t(x,0)=g(x)=0$ باشد آنگاه تابع $t$ دار ضرب شده در پاسخ نهایی جواب از جنس $\cos \lambda c t$ می‌باشد. به عبارت دیگر هرگاه در معادله موج $g(x)=0$ باشد تابع $t$ دار ضرب شده در پاسخ نهایی کسینوسی خواهد بود.

نکته مهم ۴: در حالات ب نیز نکته جالبی دیده می‌شود که در واقع عکس حالت نکته ۳ می‌باشد. چکیده آن این است که اگر در معادله موج تابع $u(x,0)=f(x)$ برابر صفر باشد آنگاه تابع $t$ دار ضرب شده در پاسخ نهایی سینوسی خواهد بود.

حالت سوم: اگر طول ~~نخ~~ طناب نامحدود و ابتدای طناب بسته باشد:

$$\begin{cases} u_{xx}=\frac{1}{c^2}u_{tt}, & x>0, \quad t>0 \\ u(0,t)=0 \\ u(x,0)=f(x), & u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

با استفاده از روش تفکیک متغیرها جواب به فرم زیر درخواهد آمد:

$$u(x,y)=(A\cos\lambda ct+B\sin\lambda ct)(C\sin\lambda x+D\cos\lambda x)$$

$$u(0,t)=0 \longrightarrow D=0$$

چون ~~شرط~~ دیگری نداریم پس قیدی روی $\lambda$ پیدا نمی‌شود و شرط واقعی

به جای سری فوریه از انتگرال فوریه کمک می‌گیریم:

$$u(x,t)=\int_0^\infty (A(\omega)\cos\omega ct+B(\omega)\sin\omega ct)(C\sin\omega x)\,d\omega$$

در اینجا متناسب با صفر بودن $f$ یا $g$ جواب متفاوت خواهد بود!

الف: $g(x)=0$

$$u_t(x,0)=0 \longrightarrow B(\omega)=0$$

۹۱/۱۰/۱۲ — (ادامه) تمرین سری هفتگی بخش ۱۱-

$$\rightarrow \boxed{u(x,t)=\int_0^{\infty}\left(A'(\omega)\cos\omega c t\right)\sin\omega x \, d\omega}$$

$$u(x,0)=f(x)=\int_0^{\infty} A'(\omega)\sin\omega x \, d\omega$$

$A'(\omega)$ همان ضریب انتگرال فوریه سینوسی است لذا:

$$A'(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin\omega x \, dx$$

ب: $f(x)=0$

$$u(x,0)=0 \longrightarrow A(\omega)=0$$

$$\rightarrow \boxed{u(x,t)=\int_0^{\infty}\left(B'(\omega)\sin\omega c t\right)\sin\omega x \, d\omega}$$

$$u_t(x,0)=g(x)=\int_0^{\infty}\left(\underbrace{\omega c B'(\omega)\cos\omega c\times 0}_{B(\omega)}\right)\sin\omega x \, d\omega$$

$\cos\omega c\times 0 \rightarrow 1$

عبارت داخل نقطه چین ها ضریب ~~فوریه~~ انتگرال فوریه سینوسی است لذا:

$$B(\omega)=\omega c B'(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} g(x)\sin\omega x \, dx$$

$$\Rightarrow B'(\omega) = \frac{2}{\pi \omega c}\int_0^\infty g(x) \sin \omega x \, dx$$

حالت چهارم : اگر طول نخ بی‌نهایت و ابتدای آن باز باشد :

$$\begin{cases} u_{xx} = \dfrac{1}{c^2} u_{tt} , & x>0 , \quad t>0 \\ u_x(0,t) = 0 & \\ u(x,0) = f(x) & u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

طبق مسائل قبل :

$$u(x,y) = (A \cos \lambda ct + B \sin \lambda ct)(C \sin \lambda x + D \cos \lambda x)$$

$$u_x(0,t) = 0 \longrightarrow C = 0$$

چون قیدی روی $\lambda$ دیده نمی‌شود ناچاریم از انتگرال فوریه کمک بگیریم :

$$\longrightarrow u(x,t) = \int_0^\infty \big(A(\omega) \cos \omega ct + B(\omega) \sin \omega ct\big) \cos \omega x \, d\omega$$

دراینجا نیز متناسب با تحقق‌پذیری $f$ یا $g$ می‌توان ۲ جواب متفاوت ارائه کرد.

۹۱/۱۰/۱۲ — دریا آقادر توانا ۱۱ —

الف: $g(x) = 0$

$u_t(x,0) = 0 \longrightarrow B(w) = 0$

$$\longrightarrow \boxed{u(x,t) = \int_0^\infty (A(w)\cos wct)\cdot \cos wx \, dw}$$

$$u(x,0) = f(x) = \int_0^\infty A(w) \cos wx \, dw$$

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x) \cos wx \, dx$$

که $A(w)$ همان ضریب انتگرال فوریه کسینوسی است

ب) $f(x) = 0$

$u(x,0) = 0 \longrightarrow A(w) = 0$

$$\longrightarrow \boxed{u(x,t) = \int_0^\infty (B(w) \sin wct) \cos wx \, dw}$$

$$u_t(x,0) = g(x) = \int_0^\infty \underbrace{(B(w)\cdot wc \times 1)}_{A(w)} \cos wx \, dw$$

$$A'(w) = B(w)\cdot wc = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty g(x) \cos wx \, dx$$

$$\Rightarrow B(w) = \frac{2}{\pi wc}\int_0^\infty g(x) \cos wx \, dx$$

نکته مهم اول: همان طور که در حالت محدود نیز دیدیم، تنها عامل تعیین
کننده ی پایه ی تعامد شرط مرزی اول یا شرط در $x=0$ می باشد.

اگر شرط در $x=0$ روی $u$ باشد ($u(0,t)=0$) پایه ی متعامد $\sin wx$
و اگر شرط در $x=0$ روی $u_x$ باشد ($u_x(0,t)=0$) پایه ی متعامد $\cos wx$
خواهد بود.

نکته مهم دوم: همان طور که در حالت محدود نیز دیدیم صفر شدن $f$ یا $g$
تنها روی تابع $t$ دار ضرب شده در پایه ی متعامد تاثیر گذار است.
اگر $g(x)=0$ باشد تابع $t$ دار کسینوسی و اگر $f(x)=0$
باشد تابع $t$ دار سینوسی خواهد شد.

توجه مهم: سعی کنید مواردی که در این جزوه توضیح داده شده را
حداقل ۳ بار در فاصله زمانی یک هفته ای اثبات
کنید تا ملکه ذهنتان شود و این موارد را اثبات کنید،
ناخواسته حفظ می شوید اما اگر بخواهید آن ها را حفظ کنید و اثبات
نکنید نتیجه فضاحت بار آن را سر جلسه کنکور متوجه خواهید شد.